La physique dans la recherche en mathématiques constructives

-- Version préliminaire --

Ardourel Vincent

I.H.P.S.T / Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Résumé

Dans cet article, je propose d'analyser une *pratique* de la recherche en mathématiques *constructives,* celle qui consiste à *reformuler constructivement les théories physiques*. Je discute plus précisément trois aspects de cette pratique. Je montre d'abord que celle-ci a la particularité d'être motivée par des considérations *philosophiques* et comment la physique est utilisée pour arbitrer un débat de philosophie des mathématiques entre constructivisme et classicisme. Ensuite, j'identifie la *méthodologie* de la recherche en mathématiques que cette pratique implique et montre qu'il s'agit, selon la terminologie empruntée à Poincaré, d'une méthodologie de « logiciens ». Enfin, je montre que dans cette pratique, les théories physiques ont un *rôle heuristique* sur le développement des mathématiques constructives. Elles permettent avec succès de *stimuler* la recherche d'énoncés constructifs et d'*orienter* la recherche en mathématiques constructives vers de nouveaux domaines.

Abstract

In this paper, I focus on a *practice* of mathematical research which consists in *reformulating constructively physical theories*. More precisely, I discuss three features of this practice. First, I show that it is stimulated by *philosophical* views and discuss how physics is used in the debate between classicism and constructivism in the philosophy of mathematics. Secondly, I characterise the *methodology* of the research in mathematics involved by this practice and show this is a methodology of "logicians" as Poincaré said. Finally, I show that in this practice, physical theories play a *heuristic role* for the progress of constructive mathematics. Successfully, they *stimulate* researches on constructive results and *lead* to the study of new provinces of constructive mathematics.

Introduction

Les rapports qu'entretiennent les mathématiques et la physique ont fait et continuent de faire l'objet de nombreuses études en philosophie des sciences. La question la plus discutée est celle de l'*applicabilité* des mathématiques à la physique : 'pourquoi et comment les mathématiques s'appliquent-elles à la nature ?' et 'comment les mathématiques participent-elles du développement de la physique ?' [Steiner 1998], [Morrisson 2000], [Wilson 2000], [Batterman 2002]. La question inverse, celle de savoir si et comment la physique contribue au développement des mathématiques se révèle en revanche être beaucoup moins discutée.

Certains se sont tout de même penchés sur cette question. Dès 1905 H. Poincaré souligne déjà les interactions entre la physique mathématique et les mathématiques pures et montre notamment comment la première contribue au développement de la seconde[1] [Poincaré 1905, 152]. Plus récemment, [Maddy 2008] met en évidence l'influence des mathématiques appliquées dans l'histoire des mathématiques pures. Urquhart [2008a], [2008b] s'intéresse aussi aux interactions entre physique et mathématiques en se concentrant sur le « problème inverse » [Urquhart 2008a, 413] à celui traditionnellement discuté : il s'intéresse à l'application de la physique aux mathématiques. Il montre comment les mathématiques se développent en « assimilant » [Urquhart 2008a, 413] les idées des physiciens et comment la méthodologie de la physique s'exporte en mathématiques. Cependant, dans toutes ces discussions, les mathématiques en jeu sont les *mathématiques classiques*, celles qui se fondent sur la logique classique et qui sont communément utilisées par la communauté scientifique et enseignées à l'université. Il existe d'autres types de mathématiques, fondées sur des logiques différentes et qui, comme les mathématiques classiques, font aussi l'objet de recherches de la part de la communauté scientifique. La place de la physique dans ce type de recherches mathématiques n'a en revanche pas fait l'objet de réelle discussion. [Flecher 2002] a bien abordé la question d'une *Perspective constructiviste de la physique* mais sans discuter l'influence de la physique sur la recherche en mathématiques constructives. [Brown 2002] a en revanche souligné comment la physique interagissait avec les mathématiques constructives en permettant d'exporter sur un 'terrain pratique' le débat philosophique entre constructivisme et classicisme.

Dans cet article, je propose d'analyser l'influence de la physique dans la recherche en mathématiques constructives. Plus précisément, je propose de montrer qu'une *pratique* de la recherche en mathématiques constructives consiste à *reformuler de manière constructive les théories physiques*. Je discuterai en particulier *trois aspects* de cette pratique. Dans la partie II, je montrerai qu'elle illustre une situation assez rare selon laquelle la recherche en mathématique est *motivée* par des considérations de *philosophie* des mathématiques : nous verrons que cette dernière exerce une réelle influence sur l'établissement de résultats techniques des mathématiques constructives. Dans la partie III, je montrerai

[1] La physique mathématique permet d'une part de *révéler* des problèmes d'analyse pure (comme par exemple dans le cas de l'étude de la propagation de la chaleur par [Fourier 1822] qui a conduit à poser le problème de la résolution d'une équation différentielle, l'équation de la chaleur) et d'autre part, parfois, d'aider *à trouver* des moyens pour les résoudre (comme par exemple dans le cas du mathématicien [Klein 1893] qui, pour résoudre une question d'analyse complexe, utilise une analogie physique [Poincaré 1905, 13 & 153]). Je reviendrai sur cet exemple dans la partie III.

ensuite que cette pratique de la recherche consiste en une *méthodologie* que je qualifierai de « logicienne » [Poincaré 1905, 12] selon la terminologie de Poincaré. Enfin, dans la partie IV je montrerai que dans cette pratique, les théories physiques possèdent un *rôle heuristique* fructueux pour le développement des mathématiques constructives, au sens où elles *révèlent* des problèmes et des domaines de recherches *nouveaux* en mathématiques constructives. Avant cela, je commencerai dans une première partie par présenter les spécificités de la recherche en mathématiques constructives.

I. La recherche en mathématiques constructives

La recherche de *preuves* constructives

Au sein de la communauté des mathématiciens, les constructivistes constituent une minorité de chercheurs[2] aux exigences bien particulières : ils considèrent les preuves constructives comme les seules preuves légitimes. Pour les constructivistes, un objet mathématique *existe*, si l'on peut en principe *construire* l'objet à l'aide d'une procédure. Cette exigence se traduit par différents types de constructivisme. Il est par exemple possible de travailler dans le cadre de la théorie des fonctions récursives [Kushner 1973] ou dans celui de la théorie *Type Two Effectivity* [Weihrauch 2000][3]. Dans cet article, je me limiterai aux mathématiques constructives héritées des travaux de [Bishop 1967] et à l'interprétation que Bridges et Richman en font[4]. A la question de savoir ce que sont les mathématiques constructives, D. Bridges répond :

> Selon les pionniers du sujet, tels que Brouwer, Markov et Bishop, ce sont les mathématiques qui exigent d'interpréter 'ce qui existe' comme 'ce qui est calculable' (en un sens qui dépend de la perspective de chacun d'eux). En adoptant cette interprétation on est obligé, de manière presque inévitable, de recourir à une logique différente de la traditionnelle logique classique […] Selon nous, il est clair qu'en pratique *les mathématiques constructives ne sont rien d'autre que les mathématiques utilisant la logique intuitionniste.* [Bridges 1999, 439]

---

[2] La communauté des constructivistes compte tout de même plusieurs équipes de recherches à travers le monde : notamment les départements de mathématiques des Universités d'Uppsala en Suède (Erik Palmgren et Viggo Stoltenberg-Hansen), de Munich en Allemagne (Josef Berger, Peter Schuster et Helmut Schwichtenberg), de Padoue en Italie (Milly Maietti, Giovanni Sambin et Silvio Valentini), de Canterbury en Nouvelle-Zélande (Douglas Bridges et Luminiţa Simona Vîţă) et l'Institut des Sciences et des Technologies du Japon (Hajime Ishihara et Takako Nemoto). Le programme de recherche européen 'CONSTRUMATH' coordonné par P. Schuster rassemble ces différents centres de recherches.

Notons aussi que d'autres groupes de recherches s'intéressent plus particulièrement à l'application des mathématiques constructives à l'informatique, par exemple le département de sciences computationnelles de l'Université de Cornell aux Etats-Unis (avec Robert L. Constable) [Bridges FAQ, #6].

[3] Ces deux théories fournissent l'exemple d'une approche constructive des mathématiques fondées sur la *logique classique*.

[4] J'utiliserai aussi le travail de [Ye 2008, 2011] qui s'inscrit dans un type de constructivisme très proche de celui Bridges et Bishop. Il s'agit d'une approche *finitiste stricte* (voir note de bas de page n°76).

Les constructivistes tels que Bridges et Richman suivent Bishop en interprétant l'exigence de constructivité des preuves mathématiques par le recours à la *logique intuitionniste*. Celle-ci se distingue de la logique classique notamment par l'absence du principe du tiers-exclu. En logique intuitionniste, on ne peut pas conclure à la vérité d'une proposition à partir de la fausseté de la proposition contraire et la double négation d'une proposition n'est pas équivalente à son affirmation.

L'activité de recherche en mathématiques constructives consiste généralement à *reformuler* constructivement les résultats des mathématiques classiques. Elle consiste à chercher des *preuves constructives* des théorèmes des mathématiques classiques dans les domaines aussi variés que l'analyse, l'algèbre et la topologie. Ce type d'activité peut de prime abord laisser penser que la recherche en mathématiques constructives ne participe pas au développement des mathématiques (classiques et constructives). En effet, les théorèmes que les constructivistes cherchent à prouver ne sont généralement pas des théorèmes *nouveaux* au sens où ils ont déjà été démontrés dans le cadre des mathématiques classiques.

Une telle conception du développement des mathématiques n'est pas tenable. Premièrement, les théorèmes non-constructifs des mathématiques classiques *ne sont pas* des théorèmes pour les constructivistes. Produire une preuve constructive d'un énoncé déjà démontré en mathématiques classiques, c'est démontrer un *nouveau théorème* des mathématiques constructives. La notion de nouveauté d'un théorème est relative au type de mathématiques en question. Ainsi, en tant qu'elle produit de nouveaux théorèmes constructifs, la recherche en mathématiques constructives participe à son propre développement.

Deuxièmement, il arrive aux constructivistes de prouver des théorèmes qui n'ont encore jamais été démontrés dans le cadre des mathématiques classiques. Considérons par exemple l'énoncé suivant : « il existe un algorithme qui, appliqué à une fonction holomorphe f sur le domaine $D(0,1)$, ainsi qu'à deux valeurs complexes omises du domaine de f, calcule l'ordre ν du pôle de f en 0 » [Bridges, FAQ #4]. Ce théorème a été démontré en 1982 de manière constructive par [Bridges et al. 1982]. Or, il n'existe pas actuellement de preuve de cet énoncé autre que la preuve constructive[5]. Il existe des preuves classiques d'énoncés qui ressemblent à cet énoncé, c'est-à-dire des énoncés dont le contenu est proche de l'énoncé en question, en l'occurrence le théorème de Picard [Picard 1879], [Conway 1978, chapitre 12]. En revanche, il n'existe pas de preuve de *cet énoncé précisément* autre que la preuve constructive. Cet exemple illustre un aspect surprenant de la recherche en mathématiques constructives. Celle-ci peut contribuer au développement des mathématiques classiques : en effet un théorème qui a été prouvé dans le cadre des mathématiques constructives peut ensuite toujours devenir un théorème des mathématiques classiques[6].

Une recherche récemment dirigée vers la physique

[5] « Je ne connais aucune preuve de cet énoncé autre que la preuve constructive de [Bridges, 1982] » [Bridges FAQ, #4].

[6] C'est un des avantages que possèdent les mathématiques constructives sur les mathématiques classiques : « tout théorème prouvé avec la logique intuitionniste peut [ensuite] être modélisé dans le cadre des mathématiques classiques » [Bridges 1999, 440].

Jusque dans les années 1980, la recherche en mathématiques constructives concernait exclusivement le domaine des *mathématiques pures* : les mathématiques appliquées à la physique ne semblaient pas faire partie des sujets de recherches des constructivistes. Dans le livre de référence de [Bishop 1967], *Foundation of Constructive Analysis*, aucune mention n'est faite à de possibles applications des mathématiques constructives à la physique. Selon lui :

> Ce livre est une contribution à la propagande constructiviste, conçu pour montrer qu'il existe une alternative satisfaisante [aux mathématiques classiques]. Dans ce but nous développons une grande partie de l'*analyse pure*[7] de manière constructive. [Bishop 1967, ix]

Pourtant, il existait déjà à la même époque de nombreux travaux de recherches en mathématiques classiques appliquées à la physique[8]. Cette différence de traitement pour les applications s'explique notamment par le fait que contrairement aux mathématiciens classiques, les constructivistes s'intéressent en premier lieu aux *fondements des mathématiques* et plus précisément aux types de *preuves* qu'il est légitime d'accepter en mathématiques. On comprend dès lors que l'*applicabilité* des mathématiques constructives à la physique ne constituait pas une activité de recherche prioritaire.

Une des premières contributions des constructivistes aux mathématiques appliquées à la physique est due à Bridges. Dans [Bridges 1981], celui-ci jette les bases d'une reformulation constructive de la mécanique quantique dans son article *Towards a constructive formulation for quantum mechanics*. Les notions physiques d'*états*, d'*évènement*s, d'*opérateurs* qui interviennent en mécanique quantique sont définies dans le cadre des mathématiques constructives[9]. Par exemple, quatre axiomes (numérotés de *ES1* à *ES4*) sont énoncés à propos de deux ensembles *E* et *S*[10] dans le but de définir les notions d'*évènements* et d'*états* d'un système physique :

> On appelle *structure d'évènement* le couple (*E,S*) satisfaisant [aux axiomes] ES1-ES4. Les éléments de *E*, ou *évènements*, sont interprétés comme les résultats des expériences physiques et peuvent être identifiés avec des questions dont les réponses sont 'oui' ou 'non'. (Par exemple, 'est-ce qu'un électron passe à travers une certaine fente du dispositif expérimental ?') L'interprétation de '$a \leq b$' est la suivante : si l'évènement a se produit, alors l'évènement b se produit aussi ; on interprète a' comme l'évènement qui se produit précisément quand a ne se produit pas. D'autre part, les éléments de *S*, ou *états*, représentent les états d'un système physique dans le sens suivant : *s(a)*

[7] Je souligne.

[8] Par exemple, la première édition du livre de [Jeffreys & Jeffreys 1946] *Methods of Mathematical Physics* parait en 1946. De même, plusieurs revues scientifiques telles que *Journal of Mathematical Physics* ou *Theoretical and Mathematical Physics* ont commencé à paraître respectivement dès 1960 et 1969.

[9] « Récemment, beaucoup d'efforts ont été engagés dans la recherche d'un fondement axiomatique de la physique qui conduit d'une manière naturelle au modèle de l'espace de Hilbert standard de la mécanique quantique. Dans cet article, nous décrivons une théorie axiomatique constructive des évènements et des états, et nous montrons que les parties appropriées du modèle de l'espace de Hilbert satisfont à nos axiomes » [Bridges 1981, 260].

[10] *E* pour *events* (évènements) et *S* pour *states* (états).

> est la probabilité que l'évènement a se produise quand le système est préparé dans l'état représenté par l'élément s de S. [Bridges 1981, 262]

Bridges énonce les axiomes *ES1* à *ES4*[11] de manière à pouvoir *prouver constructivement* les théorèmes que l'on peut en tirer. Son travail consiste ainsi à élaborer un *cadre* mathématique constructiviste permettant de définir des objets mathématiques interprétables comme des notions physiques de la mécanique quantique[12]. Avec cet article, Bridges initie le projet d'une reformulation constructive de la physique, projet qui sera poursuivi jusqu'à nos jours, avec notamment les contributions de Richman [1999], Billinge [1997], Ye [1999], [2000], [2011], Spitters [2002a], [2002b], [2006].

Remarquons tout de suite que cette entreprise de *reformulation* des théories physiques ne peut pas exister en mathématiques classiques puisque les théories physiques sont *déjà* formulées avec ce type de mathématiques. En revanche, on la retrouve avec un autre type de mathématiques dont les exigences de preuve diffèrent aussi de celles des mathématiques classiques : les *mathématiques prédicatives*. Il s'agit de mathématiques qui rejettent les preuves faisant intervenir un certain type de définitions (les définitions qualifiées précisément d'*imprédicatives*[13]). Feferman, après avoir développé ce type de mathématiques, estime que l'approche *prédicative* « suffit à la formalisation de presque toutes, si ce n'est toutes les *mathématiques appliquées aux sciences*[14] » [Feferman 1998b, 285], [Feferman 1998a].

II. Une pratique motivée par la philosophie

La reformulation constructive des théories physiques est une pratique de la recherche en mathématiques qui a la particularité d'être *motivée* par des considérations *philosophiques*. Même s'il semble exister des cas similaires dans l'histoire des mathématiques[15], il s'agit d'une situation suffisamment *rare* pour mériter notre attention.

---

[11] Les quatre axiomes *ES1* à *ES4* sont :
- « *ES1* : $a \neq b$ si et seulement si il existe un s dans S tel que $s(a) \neq s(b)$ »
- « *ES2* : si a_1, a_2 ... sont des éléments orthogonaux de E tels pour tout s de S la série $\sum_n s(a_n)$ converge, alors il existe un b dans E tel que pout tout s, $s(b) = 1 - \sum_n s(a_n)$ »
- « *ES3* : si avb existe, alors pour tout s de S, $s(avb) \leq s(a) + s(b)$ »
- « *ES4* : soient a_1, a_2 ... des éléments orthogonaux de E, et s un élément de S tel que $\sum_n s(a_n)$ converge et reste inférieure à 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un b dans E tel que $b \leq a_n^{'}(n \geq 1)$ et $s(b) + \sum_n s(a_n) > 1 - \varepsilon$ » [Bridges 1981, 260] .

[12] D. Bridges propose en une *nouvelle version* d'une formulation constructive de la mécanique quantique, interprétée cette fois dans le contexte physique des réseaux quantiques [Bridges & Svozil 2000].

[13] La définition d'un objet est qualifiée d'*imprédicative* si celle-ci fait référence à une totalité infinie d'objets dont l'objet en question appartient. Selon une approche prédicative, « un objet ne peut être défini dans les termes d'une multiplicité d'objets parmi lesquels il se trouve » [Rouilhan 2005].

[14] Je souligne.

[15] Il semble en effet que ce soit aussi le cas de l'*Analyse Non Standard*, théorie mathématique développée à partir des années 1960 par A. Robinson et E. Nelson et dont les recherches semblent s'inscrire autour de la question des *infinitésimaux* leibniziens : « on montre dans ce livre que les idées de Leibniz peuvent être pleinement soutenues et qu'elles mènent à une approche novatrice et

Dans *Science and Constructive Mathematics*, Brown montre que la physique constitue un « terrain d'affrontement » ou « champ de bataille » [Brown 2003, 48] pour le débat de philosophie des mathématiques entre constructivisme et classicisme. Il s'appuie pour cela sur le débat qui a eu lieu de 1993 à 2000 entre d'un côté un groupe de constructivistes et de l'autre, leur détracteur Hellman:

> Récemment, Geoffrey Hellman a soutenu que les mathématiques constructives échouaient dans un certain nombre de cas. Par exemple, il n'y a pas de preuve constructive du théorème de Gleason, alors qu'il est crucial pour certains résultats de mécanique quantique. En relativité générale les théorèmes de singularités de Hawking and Penrose ne semblent pas avoir d'équivalents constructifs et de même pour les opérateurs non bornés de la mécanique quantique[16]. Hellman y voit là un coup fatal. Cependant, des constructivistes (Bridges, Richman, Billinge) ont répondu qu'il existait une version constructive du théorème de Gleason suffisante pour tous les besoins de la mécanique quantique. Selon les constructivistes, il devrait en être de même pour les autres exemples. [Brown 2003, 48]

Ce débat résumé par Brown entre Hellman et un groupe de constructivistes, cherche à arbitrer une question de philosophie des mathématiques (une preuve non-constructive est-elle légitime en mathématiques ?) à partir de considérations d'*applicabilité* des mathématiques (quelles sont les mathématiques qui s'appliquent à la nature ?). Cette stratégie repose sur l'acceptation d'un présupposé *indispensabiliste*, à savoir que la viabilité des mathématiques dépend de leur indispensabilité en sciences[17]. Cette démarche est assumée par G. Hellman qui considère que :

> Comme Weyl le soutenait, 'c'est une fonction des mathématiques que d'être au service des sciences de la nature' [Weyl 1949, 61]. Remplir cette fonction est en effet un objectif indispensable à n'importe quel substitut des mathématiques classiques. Une alternative qui échouerait

---

féconde de l'Analyse classique et beaucoup d'autres branches des mathématiques » [Robinson 1966, 2], traduction française de l'extrait par I. Drouet (communication privée).

[16] « Un opérateur A borné, défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ dans un domaine $D(A) \subseteq \mathcal{H}$ est une fonction satisfaisant :

$\| A\psi \| \leq k \| \psi \|$, avec $\psi \in D(A), k \in \mathbb{R}^+$

et où $\|.\|$ correspond à la norme d'un vecteur défini par le produit scalaire sur $\mathcal{H}$. Un *operateur non borné* est un opérateur pour lequel il n'existe pas un tel k » [Heathcote 1990, 524].

[17] La notion d'*indispensabilité* des mathématiques dans les sciences empiriques a fait et continue de faire toujours l'objet de nombreuses discussions en philosophie des mathématiques. Ces discussions [Field 1980] [Colyvan 2001], initiées par [Quine 1953] et [Putnam 1971], cherchent à arbitrer une question d'*ontologie* (les objets mathématiques existent-ils indépendamment de nous ?) à partir de la constatation selon laquelle ces derniers s'avèrent indispensables dans les sciences empiriques (ou au contraire, *pas* indispensables selon la position philosophique défendue). Il s'agit d'arbitrer sur un terrain 'pratique' le débat entre nominalisme et platonisme en philosophie des mathématiques. Dans notre cas, les arguments d'*indispensabilité* ne sont pas utilisés pour débattre une question *ontologique* mais de fondement *logique*. En effet, selon l'interprétation de Richman et Bridges que nous suivons, « on peut travailler constructivement – c'est-à-dire en utilisant la logique intuitionniste- avec *n'importe quel objet* [je souligne] des mathématiques, et non avec seulement quelques objets particuliers d'un type 'constructif' (quel qu'en soit le sens) » [Bridges 1999, 440].

> sur ce point n'est certainement pas un substitut viable. [Hellman 1998, 426][18]

En retenant ainsi comme critère d'évaluation des mathématiques, leur capacité à permettre une formulation des théories physiques, on comprend dès lors l'enjeu pour Hellman de montrer les failles d'une reformulation constructive des théories physiques, ce qu'il a effectivement cherché à faire dans [Hellman 1993a], [1993b] et [1998].

Ce présupposé indispensabiliste est non seulement retenu par les détracteurs du constructivisme[19] mais aussi par certains constructivistes eux-mêmes[20]. F. Ye, qui développe dans [1999, 2000, 2011] une formulation constructive des opérateurs non bornés, les opérateurs dont G. Hellman juge précisément que leur non-constructivité est problématique, introduit ses travaux comme suit :

> Nous considérons cet article comme une contribution au projet général consistant à chercher une réponse à la question : *Les mathématiques classiques sont-elles logiquement indispensables pour formuler les théories physiques contemporaines* […] *?* [Ye 2000, 358]

De même H. Billinge qui travaillait à la recherche d'une preuve constructive du théorème de Gleason, écrivait deux ans avant que celle-ci ne soit trouvée :

> Le problème auquel nous sommes confrontés est le suivant : si nous ne pouvons pas prouver (d'une quelconque manière) une forme du théorème de Gleason à l'aide des mathématiques constructives, il semblerait que nous perdions un théorème très important de la mécanique quantique. Il semblerait que les mathématiques classiques s'avèrent *indispensables*[21] aux sciences contemporaines. [Billinge 1997, 662]

[18] On retrouve aussi ce présupposé dans :
- [Hellman 1993b, 211] : « dans quelle mesure les mathématiques réellement utilisées dans les sciences empiriques, particulièrement en physique, peuvent être formulées constructivement […]? Il n'est probablement pas exagéré de dire que la viabilité d'une philosophie constructiviste des mathématiques est ici en jeu »
- et aussi dans [Hellman 1992, 456] où celui-ci y discute explicitement la question suivante : « Dans quelle mesure les mathématiques classiques, le raisonnement infinitiste (non-constructif), sont-ils indispensables aux mathématiques applicables aux sciences ? »

[19] Brown formule ce présupposé de manière encore plus catégorique : « Si les mathématiques classiques sont indispensables aux sciences, alors l'approche constructive est réellement ruinée » [Brown 2003, p. 48].
Remarquons que Brown lui-même se range du côté de Hellman dans son article de [2003]. Il y propose à son tour une situation *physique* relativement simple qui ne semble ne pas pouvoir être formulée selon une approche constructiviste. [Smith 2003] répond à cette exemple en montrant comment un physicien constructiviste pourrait finalement formuler cette situation.

[20] [H. Billinge 2000, p. 313] souligne cependant que ce présupposé ne semble pas être accepté par le constructiviste M. Dummett : « la logique appropriée pour les mathématiques [classique ou intuitionniste] est déterminée par la théorie correcte de la signification en mathématiques. Il [M. Dummett] ne reconnaîtrait simplement pas le fait (si c'est le cas) que certains résultats des théories scientifiques contemporaines qui ne peuvent seulement être formulés avec les mathématiques classiques montrent que les mathématiques constructives sont inadéquates en un quelconque sens ».

[21] Je souligne.

Enfin, Spitters qui en [2002a] propose dans sa thèse un développement de la théorie constructive de l'intégration et de l'analyse fonctionnelle introduit son travail comme suit :

> [La question de savoir] si les mathématiques constructives sont *suffisantes*[22] pour développer la physique mathématique, et particulièrement la mécanique quantique […] a soulevé plusieurs problèmes précis de mathématiques. Certains de ces problèmes ont été résolus. […][23] D'autres problèmes seront résolus dans cette thèse[24]. [Spitters 2002a, 9]

Etant donné le présupposé commun à certains constructivistes et à leurs détracteurs à propos de l'enjeu d'une *possible* reformulation constructive de la physique, on comprend dès lors que la reformulation *effective* des théories physiques soit un réel projet de recherche des mathématiques constructives. En effet, la meilleure manière de montrer que les mathématiques constructives *peuvent* être suffisantes à la formulation de la physique, c'est encore d'*établir* une telle reformulation constructive des théories physiques.

Après avoir montré comment la reformulation constructive des théories physiques était une pratique motivée par des considérations philosophiques, je propose d'identifier à quel type de méthodologie de la recherche en mathématiques cette pratique correspond.

III. La reformulation constructive des théories physiques : une *méthodologi*e de « logiciens »

Dans *la Valeur de la Science*, Poincaré distingue deux types de mathématiciens : les *logiciens* et les *intuitifs* [Poincaré 1905, chapitre I §1][25]. Les premiers cherchent avant tout à *prouver* des énoncés mathématiques, même s'ils paraissent

---

22 Je souligne.

23 « Bridges et Richman ont donné une preuve constructive du théorème de Gleason. Ye a donné une formulation constructive du théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints non bornés sur des espaces de Hilbert. » [Spitters 2002a, 9].

24 « Plus précisément, nous donnerons une formulation constructive au théorème ergodique, au théorème de Peter-Weyl pour la représentation des groupes compacts, au théorème d'approximation des fonctions quasi-périodiques et nous développerons en partie de manière constructive la théorie des opérateurs. Nous étendrons aussi les résultats de Ye sur les opérateurs non-bornés sur les espaces de Hilbert » [Spitters 2002a, 9].

25 « Il est impossible d'étudier les œuvres des grands mathématiciens, et même celles des petits, sans remarquer et sans distinguer deux tendances opposées, ou plutôt deux sortes d'esprits entièrement différents. Les uns sont avant tout préoccupés de la logique, à lire leurs ouvrages, on est tenté de croire qu'ils n'ont avancé que pas à pas, avec la méthode d'un Vauban qui pousse ses travaux d'approche contre une place forte, sans rien abandonner au hasard. Les autres se laissent guider par l'intuition et font du premier coup des conquêtes rapides, mais quelquefois précaires, ainsi que de hardis cavaliers d'avant-garde.

Ce n'est pas la matière qu'ils traitent qui leur impose l'une ou l'autre méthode. Si l'on dit souvent des premiers qu'ils sont des analystes et si l'on appelle les autres géomètres, cela n'empêche pas que les uns restent analystes, même quand ils font de la géométrie, tandis que les autres sont encore des géomètres, même s'ils s'occupent d'analyse pure. C'est la nature même de leur esprit qui les fait *logiciens* ou *intuitifs* [je souligne], et ils ne peuvent la dépouiller quand ils abordent un sujet nouveau. » [Poincaré 1905, 11].

évidents et connus de tous[26]. Les seconds cherchent à *proposer des énoncés nouveaux*, des conjectures jamais formulées auparavant, même si la preuve de leur conjecture peut manquer de rigueur[27]. Ce sont deux *méthodologies* de la recherche en mathématiques bien différentes. L'une place la recherche de *preuves rigoureuses* comme l'activité essentielle des mathématiciens, l'autre la recherche d'*énoncés nouveaux*.

A partir de cette distinction, comment qualifier le rôle joué par la physique dans la recherche en mathématiques ? Dans cette partie, je montrerai que la physique intervient dans une recherche en mathématiques *classiques* à la fois selon une méthodologie « intuitive »[28] et une méthodologie « logicienne ». En revanche, elle semble seulement intervenir selon une méthodologie « logicienne » dans le cas de la recherche en mathématiques *constructives*.

La physique et la méthodologie *intuitive* en mathématiques

Poincaré illustre comment la physique intervient dans la méthodologie *intuitive* des mathématiciens (classiques) sur l'exemple d'un résultat d'*analyse complexe*[29] que le géomètre Klein a établi en ayant recours à une analogie physique :

> [M. Klein] étudie une des questions les plus abstraites de la théorie des fonctions; il s'agit de savoir si sur une surface de Riemann donnée, il existe toujours une fonction admettant des singularités données. Que fait le célèbre géomètre allemand ? Il remplace sa surface de Riemann par une surface métallique dont la conductibilité électrique varie suivant certaines lois. Il met deux de ses points en communication avec les deux pôles d'une pile. Il faudra bien, dit-il, que le courant passe, et la façon dont ce courant sera distribué sur la surface définira une fonction dont les singularités seront précisément celles qui sont prévues par l'énoncé.
> Sans doute, M. Klein sait bien qu'il n'a donné là qu'un aperçu : toujours est-il qu'il n'a pas hésité à le publier ; et il croyait probablement y trouver sinon une démonstration rigoureuse, du moins je ne sais quelle certitude morale. Un logicien aurait rejeté avec horreur une semblable conception, ou plutôt il n'aurait pas eu à la rejeter, car dans son esprit elle n'aurait jamais pu naître. [Poincaré 1905, 13]

Quel rôle, dans cet exemple, la physique a-t-elle joué dans la recherche en mathématiques ? Selon Poincaré, Klein a utilisé la théorie électromagnétique pour *interpréter* un problème mathématique comme un problème physique [Klein 1893, 167], [Klein 1895], [Chorlay 2007, 135]. Cette interprétation a fourni une

[26] Poincaré prend l'exemple suivante : « M. Méray veut démontrer qu'une équation binôme a toujours une racine, ou, en termes vulgaires, qu'on peut toujours subdiviser un angle. S'il est une vérité que nous croyons connaître par intuition directe, c'est bien celle-là. Qui doutera qu'un angle peut toujours être partagé en un nombre quelconque de parties égales ? M. Méray n'en juge pas ainsi ; à ses yeux, cette proposition n'est nullement évidente et pour la démontrer, il lui faut plusieurs pages » [Poincaré 1905, 12].

[27] L'exemple pris par Poincaré pour illustrer cette méthodologie est discuté à la section suivante.

[28] Il faut ici prendre garde à ne pas confondre la méthodologie « intuitive » et la logique *intuitionniste*.

[29] C'est le domaine des mathématiques qui étudie les fonctions à valeurs *complexes* (dans $\mathbb{C}$).

« image physique » [Poincaré 1905, 153] du problème d'analyse complexe qui a rendu possible la formulation d'une conjecture *non rigoureusement démontrée* à propos du comportement d'une fonction complexe. Grâce à la formulation complexe (au sens de l'analyse complexe) de la théorie électromagnétique, Klein a pu procéder à une *analogie* entre une expérience de pensée de physique et un problème mathématique, analogie qui lui a permis d'énoncer « sinon une démonstration rigoureuse, du moins je ne sais quelle certitude morale », c'est-à-dire une conjecture mathématique.

Il semble que nous retrouvions cette méthodologie « intuitive » de la recherche en mathématiques classiques dans des discussions plus récentes. [Urquhart 2008b] montre comment la physique permet de fournir des *méthodes de calculs* qui, alors même qu'elles ne reçoivent *pas* de fondements mathématiques *rigoureux*, sont utilisées par certains mathématiciens[30]. C'est le cas par exemple de la *Méthode des Répliques*, introduite par le physicien Mézard pour résoudre des problèmes de physique statistique [Mézard, Parisi & Virasoro 1987]. Cette méthode permet en physique de calculer la *fonction de partition* d'un système statistique[31]. Or cette méthode est *en toute rigueur* mathématiquement injustifiée [Urquhart 2008b, 432]. Cependant, cette méthode qui 'marche' en physique, c'est-à-dire qui permet d'établir des prédictions vérifiées empiriquement, s'exporte en mathématique. Elle est utilisée dans la résolution de problèmes d'optimisation combinatoire et de théorie des graphes [Urquhart 2008b, 435]. Cette 'exportation' en mathématiques est très controversée, ce qui à mon sens rend la distinction entre méthode intuitive et méthode logicienne toujours d'actualité[32].

La méthodologie « intuitive » me semble être une spécificité des mathématiques classiques. Cela s'explique certainement par le fait que les physiciens travaillent dans le cadre des mathématiques classiques et non dans celui des mathématiques constructives. Par conséquent, les analogies et les méthodes physiques dont les mathématiciens peuvent tirer profit dans leurs recherches s'appliquent seulement aux mathématiques classiques. Il n'y a certainement pas d'impossibilité à ce qu'une méthodologie « intuitive » utilisant la physique puisse être suivie dans les mathématiques constructives mais force est de constater que jusqu'à aujourd'hui, elle n'est toujours pas en vigueur. Le recours à la physique dans la recherche en mathématiques constructives ne s'inscrit pas dans une recherche mathématique qui 'devine' ou 'émet des

---

[30] Cette discussion s'inscrit dans un débat initié par un article de [Jaffe & Quinn 1993] dénonçant le manque de rigueur mathématique des méthodes de calculs utilisées par les physiciens et leur utilisation par certains mathématiciens, conduisant à ce qu'ils appellent péjorativement des 'mathématiques théoriques'. Ce débat est bien résumé dans [Urquhart 2008b, §1].

[31] C'est une grandeur théorique essentielle en physique statistique à partir de laquelle il est possible d'établir de nombreuses prédictions vérifiables empiriquement.

[32] En effet, alors que certains mathématiciens utilisent cette méthode non rigoureuse dans leurs recherches, d'autres au contraire la fustigent et cherchent à en établir un fondement rigoureux. Par exemple, [Kirkpatrick & Selman 1994] annonce un résultat d'optimisation combinatoire en utilisant des méthodes mathématiques de physiques statistiques. Cependant, 5 ans après [Friedgut & Bourgain 1999] en propose une preuve rigoureuse en utilisant les méthodes conventionnelles des mathématiciens. De même, la formule de Parisi de physique statistique, utilisée par certains mathématiciens, n'est toujours pas rigoureusement prouvée. Cependant [Talagrand 2006] a réussi à la prouver partiellement selon les méthodes conventionnelles des mathématiciens. Les mathématiciens Talagrand (qui ne voit dans la méthode des répliques qu'« une manière de *deviner* des formules correctes» [Talagrand 2003, 195]) et Friedgut travaillent selon une méthodologie que Poincaré n'hésiterait sans doute pas à qualifier de « logiciens ».

conjectures' mais au contraire dans une recherche mathématique qui *prouve en toute rigueur*.

La physique et la méthodologie *logicienne* en mathématiques

Les mathématiciens constructivistes s'intéressent à la physique dans le but de donner un *fondement rigoureux,* selon leurs propres critères, à la formulation des théories physiques. Lorsque dans [1981], [2000] Bridges s'intéresse à la formulation de la mécanique quantique et [Ye 2011] à celle de la théorie de la relativité, ils cherchent à définir *en toute rigueur* des notions utilisées en physique (telles qu'évènement, état, géodésique, courbure, tenseur etc.) mais qui reçoivent jusqu'alors une définition mathématique *illégitime* à leurs yeux. Leur travail consiste précisément à en proposer une reformulation rigoureuse.

Ce travail de recherche de fondements mathématiques rigoureux pour des notions physiques est une méthodologie que l'on retrouve aussi en mathématiques classiques. C'est précisément le travail qu'a accompli Schwartz pour la notion de *fonction δ de Dirac* [Urquhart 2008b]. Il s'agit d'une fonction qui représente en physique « la fonction densité de masse d'une particule ponctuelle de masse unité située à l'origine » [Urquhart 2008b, 429]. Selon Dirac, elle peut être utilisée « en pratique pour tout calcul de mécanique quantique sans donner de résultats incorrects » [Maddy 2008, 38]. Cependant, elle est en toute rigueur un non-sens mathématique. En effet, cette fonction est nulle partout sauf en zéro tout en possédant une intégrale sur tout l'espace égale à 1. Ceci est contradictoire puisque la propriété pour une fonction d'être nulle presque partout implique une que son intégrale sur tout l'espace soit nulle aussi. Après avoir pris connaissance de cette fonction qui conduisait à des « formules tellement folles d'un point de vue mathématique » [Schwartz 2001, 218], [Urquhart 2008b, 429], Schwartz a travaillé à l'établissement d'un fondement rigoureux et y parvient en développant la *théorie des distributions* [Zemanian 1965].

Selon moi, le travail de Schwartz pour la fonction de Dirac est analogue au travail des constructivistes pour les notions d'*états* ou d'*opérateurs hermitiens* de la mécanique quantique. Dans les deux cas, il s'agit de la recherche d'un fondement mathématique rigoureux pour des notions intervenant en physique : la *densité de masse* d'une particule ponctuelle dans un cas, les *états* et les *opérateurs hermitiens* dans l'autre. Même si ces dernières notions de la mécanique quantique reçoivent des formulations mathématiques rigoureuses dans le cadre des mathématiques classiques, elles sont considérées comme étant *mathématiquement infondées* par les constructivistes. La différence entre les deux situations consiste ainsi seulement dans *ce qui est accepté* comme étant un fondement rigoureux. Pour L. Schwartz, ce sont les mathématiques utilisant la logique classique. Pour les constructivistes, ce sont les mathématiques utilisant la logique intuitionniste.

Après avoir identifié à quel type de méthodologie la reformulation constructive des théories physiques correspondait, je propose d'examiner le rôle qu'elle joue dans le développement des mathématiques constructives.

IV. La physique dans les mathématiques constructives : un *rôle heuristique*

Reformuler constructivement les théories physiques est une pratique fructueuse de la recherche en mathématiques constructives pour au moins deux raisons. Elle permet d'une part de *stimuler* la recherche de preuves constructives d'*énoncés mathématiques* et la formulation constructive de *notions physiques*. D'autre part, elle permet d'*orienter* la recherche en mathématiques constructives vers des *nouveaux domaines.* Dans ces deux cas, les théories physiques remplissent une fonction *heuristique*, au sens où elles *indiquent* des nouveaux sujets de recherches en mathématiques constructives.

Stimuler* la recherche d'une preuve constructive d'un *énoncé mathématique individuel

La recherche d'une reformulation constructive d'une théorie physique se focalise parfois sur un énoncé en particulier. C'est notamment le cas lorsque cet énoncé est jugé avoir un statut particulièrement important dans la théorie physique. La recherche d'une preuve de *cet* énoncé en particulier a une valeur de *test* pour l'ensemble de la théorie. Dans ce cas, la pratique peut être qualifiée de *fructueuse* si elle conduit à l'établissement d'une preuve constructive de l'énoncé en question, c'est-à-dire à l'établissement d'un *nouveau théorème* des mathématiques constructives.

C'est le cas par exemple du théorème de Gleason[33]. Il s'agit d'un théorème important de la mécanique quantique : il relie d'une part la règle de Born de la mesure à d'autre part, les opérateurs statistiques et les opérateurs de projection. Il stipule que la probabilité d'un résultat de mesure s'écrit comme la trace du produit des opérateurs statistiques et de projection[34]. Ce théorème a déjà été démontré en [1957] par Gleason dans le cadre des *mathématiques classiques*. Cependant, jusqu'en 1999, cet énoncé n'était *pas encore* un théorème des mathématiques constructives. C'est [Richman & Bridges 1999] qui, non sans difficulté, en donnèrent pour la première fois une preuve constructive[35].

Lorsque les constructivistes concentrent leurs efforts à la recherche de la preuve constructive d'*un* énoncé individuel qui intervient dans une théorie physique, le contenu *physique* de la théorie en question ne semble plus intervenir. Dans ce cas, le rôle joué par le contenu physique de la théorie semble assez *faible* voire inexistant. La théorie physique contribue alors au développement des mathématiques constructives en *indiquant* un *énoncé mathématique,* certes important pour la théorie, mais qui reste avant tout un énoncé *mathématique*[36].

---

[33] « Soit μ une mesure σ-additive sur un sous-espace fermé (réel ou complexe) d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension ≥ 3. Il existe alors un opérateur auto-adjoint positif à trace W tel que, pour tout sous-espace fermé A, $\mu(A) = Tr(WP_A)$, où $P_A$est l'opérateur projection de $\mathcal{H}$sur A. » [Hellman 1993a, 193].

[34] « [C'est] le théorème répond à la question centrale : comment la *probabilité* peut-elle être introduite en mécanique quantique dans le cadre du formalisme de l'espace de Hilbert ? » [Hellman 1992, 461].

[35] « Fred Richman, par un tour de force technique et d'inventivité, a finalement produit une preuve constructive du théorème original de Gleason. » [Bridges 1999, 450].

[36] Le philosophe des mathématiques constructives Per Martin-Löf considère que le théorème de Gleason ne fait pas partie de la physique étant donné qu'il n'est pas utilisé pour faire des calculs en laboratoire [Hellman 1992, 462]. La question de savoir quels sont les critères qu'un théorème mathématique doit remplir pour qu'il *fasse partie* d'une théorie physique ne conduit pas à mon sens à une réponse simple et évidente. Cependant, je m'en tiendrai ici à l'acception selon laquelle le théorème de Gleason est un théorème mathématique qui ne fait *pas* partie de la mécanique quantique, puisqu'il n'intervient qu'*indirectement* en mécanique quantique, pour *déduire* une formule qui, elle, est *utilisé* pour faire des calculs en laboratoire, à savoir pour calculer la probabilité d'un évènement.

Stimuler la recherche d'une formulation constructive de *notions physiques*

La recherche d'une preuve constructive d'un énoncé individuel s'intègre souvent dans la recherche d'une reformulation constructive d'une théorie physique et des notions physiques qui interviennent[37]. Dans ce cas, d'une part le rôle joué par le contenu physique de la théorie semble *plus important* que dans le cas précédent. D'autre part, le résultat d'une telle pratique n'est plus *un seul* nouveau théorème (aussi important qu'il soit) mais un *ensemble de résultats* liés les uns aux autres au sein d'une même structure.

C'est le cas par exemple du travail de reformulation constructive de la mécanique quantique de [Bridges 1981]. Premièrement, dans cet exemple, il s'agit bel et bien d'énoncer différents axiomes, définitions et propriétés pour définir des *notions physiques*. Les notions d'*états* et d'*évènements* sont définies ainsi que celles d'*opérateurs* et de *résultats de mesures*, essentielles à la formulation de la mécanique quantique puisque les grandeurs physiques de la mécanique quantique (comme l'énergie, le spin, le nombre de particules etc.) sont définies comme des *opérateurs* et les *résultats de mesures* comme les états possibles du système physique après la mesure de ces grandeurs. La possibilité d'une *interprétation* physique des notions définies mathématiquement dans un cadre constructif semble décisive pour la viabilité du projet de [Bridges 1981]. Les propriétés *physiques* des *évènements*, par exemple « si l'évènement a se produit, alors l'évènement b se produit aussi » [Bridges 1981, 262] *doivent* pouvoir être formulées mathématiquement dans un cadre constructif : ce qui est le cas grâce à la relation « $a \leq b$ » [Bridges 1981, p. 262].

Deuxièmement, les résultats mathématiques de [Bridges 1981] consistent en une série de *plusieurs* lemmes et résultats constructifs liés les uns aux autres concernant entre autre la *projection des états*, la *probabilité* entre évènements et les *relations* entre évènements. Par exemple, les axiomes *ES1-ES3* permettent de prouver le *lemme* suivant pour les deux évènements a et b, avec $s(a)$ [respectivement $s(b)$] la probabilité que l'évènement a [respectivement b] se produise si le système physique est préparé dans l'état s : « si $s \in S,\ s(a) > s(b)$ et $a \wedge b'$ existe, alors $s(a \wedge b') > 0$ »[38]. Ensuite, à partir de ce résultat, il est possible de prouver un autre le lemme, par exemple : « $a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a \leq b$ »[39]. Ainsi, on constate que les apports pour les mathématiques constructives d'une formulation constructive des *notions physiques* de la mécanique quantique ne se limitent pas à l'établissement d'*un* théorème nouveau mais à un *ensemble* de lemmes et résultats mathématiques constructifs interdépendants[40].

[37] Ce n'est pas forcément le cas. Par exemple, dans [2006] Spitters développe une approche constructive du *théorème ergodique* alors même que la recherche d'une formulation constructive de la théorie physique des systèmes dynamiques (dans laquelle ce théorème intervient) ne semble pas être un sujet des recherches des constructivistes.

[38] Il s'agit du lemme (1.2) de [Bridges 1981].

[39] Il s'agit du lemme (1.3) de [Bridges 1981] et dont la preuve utilise qui utilise le lemme (1.2).

[40] Notons que la formulation constructive de la mécanique quantique de Bridges n'est pas entièrement satisfaisante comme celui-ci le reconnait lui-même : « il est clair qu'une approche constructive des fondements mathématiques de la physique quantique révèle de sérieux problèmes. » [Bridges 1981, 272]. Certains de ces problèmes, comme l'établissement d'une preuve constructive au théorème de Gleason dont Bridges notait déjà en 1981 qu'il constituait un sérieux problème, seront résolus par la suite [Richman & Bridges 1999].

Orienter la recherche vers de nouveaux domaines

La reformulation constructive d'une théorie physique permet aussi d'*orienter* les recherches en mathématiques constructives vers de *nouveaux domaines*. Il s'agit là d'un deuxième aspect du rôle heuristique que joue la physique dans la recherche en mathématiques constructives.

C'est le cas par exemple de la recherche d'un fondement constructif des *opérateurs linéaires non bornés*. Ces derniers constituent en une *extension*[41] de la théorie des opérateurs bornés des espaces de Hilbert que l'on pouvait déjà trouver dans les travaux de [Bishop & Bridges 1985]. La recherche d'un fondement constructif à une théorie *plus générale* que celle déjà existante des opérateurs bornés est essentiellement due à la recherche d'une reformulation constructive de la mécanique quantique. En effet, ces opérateurs interviennent largement en mécanique quantique, notamment pour rendre compte de notions fondamentales telles que la *position* ou l'*impulsion* des particules. Un fondement constructif pour ces opérateurs semble incontournable si l'on veut prétendre à une reformulation constructive *complète* de la mécanique quantique[42]. Ce qui est en jeu dans ce travail, c'est l'exploration d'un *domaine nouveau* dans la recherche en mathématiques constructives et qui a déjà donné de nombreux résultats. Les travaux de [Ye 1999], [2000], [2011] et [Spitters 2002a], [2002b] ont conduit notamment à la formulation constructive d'un cas particulier de ces opérateurs : les *opérateurs non bornés auto-adjoints*. Un *théorème de décomposition spectral*, le *théorème de Stone* ainsi que d'autres propriétés sur ces opérateurs ont été établis dans un cadre constructif [Ye 1999], [Ye 2000], [Ye 2011], [Spitters 2002a], [Spitters 2002b] même si « une bonne théorie pour les opérateurs non bornés [en général] reste toujours à établir » [Spitters 2002a, 55]. Il n'est d'ailleurs pas surprenant que la recherche d'une formulation constructive de la théorie des opérateurs non bornés ait commencé par celle des opérateurs non bornés *auto-adjoints* puisque ces derniers sont précisément ceux qui interviennent principalement en mécanique quantique[43].

De même, la recherche d'une formulation constructive (dans un cadre dit de *finitisme strict*[44]) de la théorie de la Relativité Générale, récemment entreprise

---

[41] Spitters [2002a], [2002b] qui poursuit les travaux de Ye [1999], [2000] sur les opérateurs non bornés parle explicitement d'*extension* et de *généralisation* pour qualifier la théorie des opérateurs non bornés par rapport à la théorie des opérateurs bornés. La théorie des opérateurs bornés devient un cas particulier de la théorie des opérateurs non bornés : « nous *généralisons* (je souligne) la notion d'opérateur pour y inclure celle des opérateurs non bornés […] L'expression 'opérateur non borné' est synonyme d''opérateur'. Selon cette terminologie, un opérateur borné est un cas particulier d'un opérateur non borné. » [Spitters 2002a, 56].

[42] Il y a un accord général sur ce point, aussi bien de la part des constructivistes que de leurs détracteurs. Par exemple, selon le mathématicien constructiviste Spitters « les opérateurs non bornés $f(x) \to f'(x)$ et $f(x) \to xf(x)$ sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ jouent un rôle fondamental en mécanique quantique » [Spitters 2002a, 55]. C'est aussi la position de Billinge : « la non-constructivité des opérateurs linéaires non bornés signifierait que les constructivistes ne peuvent pas utiliser les outils mathématiques standards pour représenter de nombreuses propriétés de la mécanique quantique (par exemple, la position et l'impulsion). Nous serions obligés de rejeter le point de vue constructif de la mécanique quantique » [Billinge 2000, 303]. Et selon Hellman, les opérateurs non bornés « sont fondamentaux pour comprendre la structure de la mécanique quantique » [Hellman 1992, 461].

[43] Les *observables* de la mécanique quantique sont en effet des opérateurs *auto-adjoints*, c'est-à-dire des opérateurs qui vérifient la relation $A = A^{\dagger}$.

[44] L'approche *finitiste stricte* de [Ye 2008], [Ye 2011] est une approche constructive très proche de celle développée par [Bishop & Bridges 1985] : « développer les mathématiques avec un finitisme

par [Ye 2011], s'attaque à un domaine encore *jamais exploré* dans les mathématiques constructives : la *géométrie pseudo-riemannienne*. Comme [Ye 2011] le souligne lui-même :

> Le chapitre 8 [de [Ye 20011]] qui concerne la géométrie pseudo-riemannienne est une addition récente au strict finitisme. Elle n'est fondée sur *aucune théorie constructive déjà existante*[45]. [Ye 2011, vii]

Dans cet exemple aussi, la recherche d'une reformulation constructive d'une théorie *physique* est *décisive* pour cette nouvelle orientation de recherche. C'est en effet dans le *but* de reformuler la théorie de la relativité génale que Ye s'intéresse à ce nouveau domaine de la recherche en mathématiques constructives :

> Ce chapitre développe les principes fondamentaux des variétés différentiables et de la géométrie pseudo-riemannienne *pour*[46] ses applications à la relativité générale. [Ye 2011, 217]

Ce travail de reformulation constructive de la théorie de la relativité générale a permis de donner un fondement constructif aux notions de tenseurs, de métrique, de dérivée covariante, de géodésique permettant ainsi de « couvrir les bases des mathématiques appliquées […] à la relativité générale » [Ye 2011, vii].

De manière générale, la physique joue un rôle heuristique, non seulement dans la recherche en mathématiques *constructives* mais aussi en mathématiques *classiques* : elle permet de *révéler* de *nouveaux domaines de recherches*. En 1822 déjà, les recherches de Fourier sur la propagation de la chaleur sont à l'origine d'un nouveau domaine de recherches en mathématiques classiques, l'*analyse de Fourier* [Fourier 1822]. Plus récemment, Maddy rappelle que « dans les sciences contemporaines, par exemple, les besoins de la théorie quantique des champs et de la théorie des cordes ont conduit à l'étude de nouveaux domaines de la théorie des ensembles » [Maddy 2008, 38]. Une fois ce *fait* constaté, d'une influence de la physique sur la recherche en mathématiques, la question de la *nécessité* de cette influence peut se poser. L'équation de la chaleur comme la géométrie pseudo-riemannienne auraient-elles pu faire l'objet des recherches en mathématiques (respectivement classiques et constructives) *si* un contexte *physique* n'avait pas été en jeu ? A cette question contrefactuelle, on peut seulement répondre que rien ne nous permet d'affirmer que l'établissement de l'analyse de Fourier n'aurait pas pu se faire *sans* les recherches physiques sur la propagation de la chaleur. De même, rien ne nous permet d'affirmer que les recherches sur les opérateurs non bornés ou sur la géométrie pseudo-riemannienne n'auraient jamais pu voir le jour si ces deux notions n'intervenaient pas dans des théories physiques. Cependant, si la physique n'est pas *en principe* nécessaire au développement de nouveaux domaines de recherche en mathématiques, il n'en reste pas moins qu'elle se révèle bel et bien *dans les faits* être à l'origine de ces nouvelles recherches. C'est une

---

strict est très proche de développer les mathématiques selon les mathématiques constructives d'Errett Bishop. Ce livre [Ye 2011] suivra beaucoup d'idée du livre *Constructive Analysis* d'E. Bishop et D. Bridges. […] Mon objectif est de démontrer que les idées principales de Bishop et de Bridges peuvent être peuvent être appliquées avec un finitisme strict, c'est-à-dire avec les mathématiques récursives élémentaires » [Ye 2011, vii]. Le *finitisme strict* est un « cadre encore plus restrictif » [Ye 2008, 2] que celui de Bishop et Bridges.

[45] Je souligne.

[46] Je souligne.

analyse de ce constat dont fait l'objet cet article, avec l'intention de mettre en évidence que la physique joue un rôle heuristique dans le développement des mathématiques entendues dans une acception plus large qu'elles ne le sont d'habitude, non seulement comprises comme les mathématiques classiques mais aussi, en plus, comme des mathématiques aux exigences de preuves bien différentes de celles des mathématiques classiques.

Conclusion

Les rapports qu'entretiennent la physique et les mathématiques ont déjà fait l'objet de nombreuses discussions mais cependant, presque toujours selon une approche où les mathématiques sont les mathématiques *classiques*. L'examen de l'influence de la physique dans la recherche en mathématiques *constructives*, qui diffèrent des mathématiques classiques par ses fondements logiques, n'a en revanche pas été beaucoup traité.

Pourtant, depuis les années 1980, les mathématiciens constructivistes se sont intéressés aux théories physiques en cherchant à les reformuler de manière constructive. Plus précisément, les constructivistes se sont essentiellement tournés vers la reformulation constructive de la mécanique quantique et de théorie de la relativité générale. Dans cet article, je me suis intéressé à cette *pratique* de la recherche en mathématiques constructives, celle qui consiste à *reformuler les théories physiques* et j'en ai proposé une analyse en discutant trois aspects. Dans un premier temps, j'ai montré que cette pratique de la recherche avait la particularité d'être *motivée* par des considérations *philosophiques*. Elle illustre une situation particulière de la recherche en mathématiques où la philosophie des mathématiques influe sur cette dernière. Dans cette interaction entre philosophie et recherches en mathématiques, la physique joue le rôle de « champ de bataille » dans le débat philosophique entre constructivisme et classicisme en mathématiques. Dans un deuxième temps, j'ai cherché à qualifier la *méthodologie* de la recherche en mathématiques à laquelle cette pratique correspond. Pour reprendre la distinction de Poincaré, il s'agit davantage d'une méthodologie de « logiciens » plutôt que d'« intuitifs » puisque l'activité de recherche en question est essentiellement dirigée vers la recherche de *preuves* plutôt que vers celle de conjectures. Dans un troisième temps, j'ai montré comment, dans cette pratique, les théories physiques avaient un *rôle heuristique* sur le développement des mathématiques constructives. Elles permettent d'une part de *stimuler* la recherche de preuves d'énoncés mathématiques individuels (comme dans le cas par exemple du théorème de Gleason) mais aussi la recherche de plusieurs résultats mathématiques constructifs interdépendants (comme ceux intervenant dans la définition de la notions physiques d'états quantiques) et d'autre part d'*orienter* la recherche en mathématiques constructives vers de nouveaux domaines (comme dans les cas par exemple des opérateurs non bornés ou de la géométrie pseudo-riemannienne).

Bibliographie

Batterman, Robert. W.
2002 *The Devil in the Details: Asymptotic Reasoning in Explanation, Reduction and Emergence*, Oxford: Oxford University Press.

Billinge, Helen
1997 A constructive formulation of Gleason’s theorem, *Journal of Philosophical Logic*, 26 (6), 661-670.

Billinge, Helen
2000 Applied constructive mathematics : on Hellman’s mathematical constructivism in spacetime, *The British Journal for Philosophy of Science*, 51 (2), 299-318.

Bishop, Errett
1967 *Foundations of Constructive Analysis*, New York: McGraw-Hill.

Bishop, Errett & Bridges, Douglas S.
1985 *Constructive Analysis*, volume 279 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Berlin: Springer-Verlag.

Bridges, Douglas S.
1981 Toward a constructive foundation for quantum mechanics, *Lecture Notes in Mathematics*, Constructive Mathematics, 873, 260-273.

Bridges, Douglas S. et al.
1982 Picard’s Theorem, *Transactions of the American Mathematical Society*, 269 (2), 513-520.

Bridges, Douglas S.
1995 Constructive mathematics and unbounded operators - A reply to Hellman, *Journal of Philosophical Logic*, 24 (5), 549-561.

Bridges, Douglas S.
1999 Can constructive mathematics be applied in physics?, *Journal of Philosophical Logic*, 28 (5), 439-453.

Bridges, Douglas & Svozil, Karl
2000 Constructive Mathematics and Quantum Physics, *International Journal of Theoretical Physics*, 39 (3), 503-515.

Bridges, Douglas
Constructive Mathematics: Frequently Asked Questions (FAQ)
http://www.math.canterbury.ac.nz/php/groups/cm/faq/

Brown, James R.
2003 Science and constructive mathematics, *Analysis*, 63 (1), 48-51.

Chorlay, Renaud
2007 L’émergence du couple local/global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953), *Thèse de Doctorat d’Histoire des Mathématiques*, Université Paris 7.

Colyvan, Mark
2001 *The Indispensability of Mathematics*, New York: Oxford University Press.

Conway, John B.
1978 *Functions of One Complex Variable I*, Graduate texts in mathematics (11), New York: Springer.

Dummett, Michael
1973 The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic, dans Truth and Other Enigmas, M. Dummett, London : Duckworth, 215-247.

Feferman, Solomon
1998a Weyl vindicated : Das Kontinuum seventy years later, dans S. Feferman, In the Light of Logic, New York: Oxford University Press, 249-283.

Feferman, Solomon
1998b Why a little bit goes a long way: Logical foundations of scientifically applicable mathematics?, dans S. Feferman, In the Light of Logic, New York: Oxford University Press, 284-298.

Field, Hartry H.
1980 *Science without numbers: a defence of nominalism*, Princeton: Princeton University Press.

Fine, Dana & Fine, Arthur
1997 Gauge Theory, Anomalies and Global Geometry: The Interplay of Physics and Mathematics, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 28 (3), 307–323.

Fletcher, Peter
2002 A Constructivist Perspective on Physics, *Philosophia Mathematica*, 10 (1), 26-42.

Fourier, Joseph
1822 *Théorie Analytique de la Chaleur*, Paris: Jacques Gabay, 1988

Friedgut, Ehud & Bourgain, Jean
1999 Sharp Thresholds of Graph Properties, and the k-Sat Problem, *Journal of the American Mathematical Society*, 12 (4), 1017-1054.

Gleason, Andrew M.
1957 Measures on the closed subspaces of Hilbert space, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 6 (6), 885-893.

Heathcote, Adrian

1990 Unbounded Operators and the Incompleteness of Quantum Mechanics, *Philosophy of Science*, 57 (3), 523-534.

Hellman, Geoffrey
1992 On the Scope and Force of Indispensability Arguments, *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 1992, 456-464.

Hellman, Geoffrey
1993a Gleason's Theorem is not constructively Provable, *Journal of Philosophical Logic*, 22 (2), 193-203.

Hellman, Geoffrey
1993b Constructive Mathematics and Quantum Mechanics : Unbounded Operators and the Spectral Theorem, *Journal of Philosophical Logic*, 22 (3), 221-248.

Hellman, Geoffrey
1997 Quantum mechanical unbounded operators and constructive mathematics – a rejoinder to Bridges, *Journal of Philosophical Logic*, 26 (2), 121-127.

Hellman, Geoffrey
1998 Mathematical constructivism in spacetime, *The Biritish Journal for Philosophy of Science*, 49 (3), 425-450.

Jaffe, Arthur & Quinn, Franck
1993 ''Theoretical mathematics'': Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 29 (1), 1-13.

Jeffreys, Harold &, Jeffreys Bertha S.
1946 *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge: Cambridge University Press, 2001

Klein, Felix
1882 Ueber *Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Leipzig: Teubner, traduction anglaise par Frances Hardcastle, On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals, Cambridge: MacMillan and Bowes, 1893.

Klein, Felix
1895 Riemann and his Significance for the Development of Modern Mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1 (7), 165-180.

Kirkpatrick, Scott & Selman, Bart
1994 Critical Behaviour in the Satisfiability of Random Boolean Expressions, *Science*, 264 (5163), 1297-1301.

Kushner, Boris A.

1973 *Lektsii po konstructivnomu matematicheskomu analizu*, Moscou: Nauka, traduction anglaise par E. Mendelson, Lectures on constructive mathematical analysis, Providence: American Mathematical Society, 1984

Mézard, Marc, Parisi, Giorgio & Virasoro, Miguel Angel
1987 *Spin Glass Theory and Beyond*, Singapore: World Scientific.

Morrison, Margaret
2000 *Unifying Scientific Theories: Physical Concepts and Mathematical Structures*, Cambridge: Cambridge University Press.

Maddy, Penelope
2008, How applied mathematics became pure, *The Review of Symbolic Logic*, 1 (1), 16-41.

Picard, Émile
1879 Sur les fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel, *Comptes rendus de l'académie des sciences*, 89, 745-747.

Poincaré, Henri
1905 *La valeur de la science, Bibliothèque de Philosophie Scientifique*, Paris: Flammarion, 1939.

Putnam, Hilary
1971 *Philosophy of Logic*, New York: Harper and Row, traduction française par P. Pecatte, Philosophie de la logique, Combas: l'Eclat, 1996.

Quine, Willard Van Orman
1953 On what there is, dans W.V.O. Quine, From a logical point of view, New York: Harper Torchbooks, 1-19, 1963.

Richman, Fred & Bridges, Douglas
1999 A Constructive Proof of Gleason's Theorem, *Journal of Functional Analysis*, 162, 287-312.

Robinson, Abraham
1966 *Non-standard analysis*, Amsterdam: Noth-Holland Publishing Company

Rouilhan (de), Philippe
2005 Prédicativisme, dans Encyclopaedia Universalis, Dictionnaire des Idées, Paris: Encyclopaedia Universalis SA, 638-640.

Schwartz, Laurent
1997 *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Paris: Odile Jacob, traduction anglaise par L. Schneps, A Mathematician Grappling with his Century, New York: Birkhäuser, 2001.

Smith, Peter
2003 Constructivism exploded?, *Analysis*, 63 (279), 263–266.

Spitters, Bas
2002a *Constructive and intuitionistic integration theory and functional analysis*, Ph. D. thesis, University of Nijmegen.

Spitters, Bas
2002b Located operators, *Mathematical Logic Quarterly*, vol. 48 (1), 107-122.

Spitters, Bas
2006 A constructive view on ergodic theorems, *Journal of Symbolic Logic*, 71 (2), 611-623.

Steiner, Mark
1998 *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Harvard: Harvard University Press.

Talagrand, Michel
2003 *Spin Glasses: A Challenge for Mathematicians*, Berlin: Springer-Verlag.

Talagrand, Michel
2006 The Parisi formula, *Annals of Mathematics*, 163 (1), 221-263.

Urquhart, Alasdair
2008a The Boundary between Mathematics and Physics, dans P. Mancosu, The Philosophy of Mathematical Practice, Oxford: Oxford University Press, 407- 416.

Urquhart, Alasdair
2008b Mathematics and Physics: Strategies of Assimilation, dans P. Mancosu, The Philosophy of Mathematical Practice, Oxford: Oxford University Press, 417-440.

Wald, Robert M.
1984 *General Relativity*, Chicago: University of Chicago Press.

Wilson, Mark
2000 The Unreasonable Uncooperativeness of Mathematics in the Natural Sciences, *The Monist*, 83 (2), 296–314.

Weihrauch, Klaus
2000 *Computable analysis*, Heidelberg: Springer-Verlag.

Weyl, Hermann
1949 *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton: Princeton University Press.

Ye, Feng
1999 *Strict constructivism and the philosophy of mathematics*, Ph. D. dissertation, Princeton University.

Ye, Feng

2000 Toward a constructive theory of unbounded linear operators, *The Journal of Symbolic Logic*, 65 (1), 357-370.

Ye, Feng
2008 A strictly Finitistic System for Applied Mathematics, rapport technique, 1-36, disponible en ligne:
http://www.phil.pku.edu.cn/cllc/people/fengye/strictlyFinitisticSystemForAppliedMath.pdf

Ye, Feng
2011 *Strict Finitism and the Logic of Mathematical Applications*, Synthese Library 355, Dordrecht: Springer

Zemanian, Armen H.
1965 *Distribution Theory and Transform Analysis*, New York: Dover Publications, 1987.